Concours d'acces en premiere année du cycle d'ingénieur
Logiciel et Système Informatique
FST Tanger, 20 Juillet 2016
Mathématiques (90min) (30%)

Directives :

- Rependez au QCM par une croix dans la case correspondante dans la grille des réponses
- Pour chaque question il y a plusieurs proposition et toujours une seule réponse qui est exacte

Barème

- Réponse exacte : +1 Réponse Inexacte : -1 Absence de réponse: -1

Question 1

Soit f une fonction définie sous la forme suivante $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$, x un nombre réel positif. Pour tout $x > 0$ on a,

A) $f'(x) - f(x) = \frac{-1}{1+e^x}$

B) $f'(x) - f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

C) $f'(x) - f(x) = \frac{-1}{1+e^{-x}}$

D) $f'(x) - f(x) = \frac{-1}{1-e^{-x}}$ $x > 0$

Question 2

On considère la suite x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ définie par ;

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de x_n?

A) x_n est une suite géométrique

B) x_n est une suite arithmétique

C) x_n est une suite constante

D) On ne peut pas en conclure

Question 3

Soient $A, B \in M_n(C)$. On suppose que la matrice A est nilpotente et que la matrice B commute avec A. Que dire de $tr(AB)$

A) $tr(AB) = 0$

B) $tr(AB) = 1$

C) $tr(AB) \neq 0$

D) $tr(AB) = 2$

Question 4

La famille des vecteurs $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ est :

A) Génératrice

B) Libre et génératrice

C) Libre

D) Aucune réponse

Question 5

On pose $f(x) = \frac{1}{x^2}\int_3^x (2v - 3f'(v))\, dv$. $f'(3)=$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{-1}{3}$

Question 6

$lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} sin\left(\frac{1}{n+k}\right)=$

A) 0 B) $sin(1)$ C) $ln(2)$ D) $+\infty$

Question 7

Une urne contient 2 boules blanches et $(n-2)$boules rouges. On effectue des tirages successifs sans remise d'une boule et on note X le rang pour lequel la boule blanche apparaît pour la première fois. $E(X)=$

A) $\frac{n+1}{2}$ B) $\frac{2n+1}{2}$ C) $\frac{3n+1}{2}$ D) $\frac{n+1}{3}$

Question 8

Pour quelle valeur de αla série dont le terme générale est $\frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^\alpha}}$ converge pour $n \geq 2$?

A) $\alpha \geq \frac{3}{2}$ B) $\alpha > \frac{2}{3}$ C) $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ D) $\alpha \leqslant \frac{2}{3}$

Question 9

La solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 2e^{-x}$ est :

A) $Y(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ B) $Y(x) = (x^2 + 3x + 4)e^{-x}$

C) $Y(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ D) $Y(x) = (x^2 + 3x + 4)e^{x}$

Question 10

Soit$\mathbb{R}$ est la région triangulaire de sommet $(0,0)$, $(\pi, 0)$ et (π, π).

$\iint_{\mathbb{R}} xcos\,(x+y)dxdy=$

A) $\frac{-3\pi}{4}$ B) $\frac{-3\pi}{2}$ C) $\frac{-2\pi}{3}$ D) $\frac{-4\pi}{3}$

Bonne

Épreuve de Mathématiques 2
Durée : 1 Heure 30 minutes

Exercice 1 *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A. *Montrer que* f *est trigonalisable sur* $\mathbb{R}$.
2. *L'endomorphisme* f *est-il diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?*
3. *Trouver une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* f *est triangulaire supérieure.*
4. *Calculer* $(A - 2I_3)^2$. *En déduire la valeur de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 *L'espace* $E = \mathbb{R}^4$ *est rapporté à sa base canonique* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. *Soit* f *l'endomorphisme de matrice* M *dans cette base.*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Quelle est la matrice de* $g = f^2$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *?*
2. *Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de* g *?*
3. *Montrer que si* λ *est une valeur propre de* f, *alors* $\mu = \lambda^2$ *est valeur propre de* g.
4. *En déduire les seules valeurs propres possibles pour* f.
5. *pour un vecteur* u *quelconque de* E, *montrer que :*

$$f(u) + 2u \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$$

$$f(u) - 2u \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_E)$$

6. *Construire un système de générateurs de* E *formé de vecteurs propres de* f.
7. *Diagonaliser* f, *soit directement, soit en utilisant ce qui précède.*

Exercice 3 *On considère les formes quadratiques suivantes :*

$$\Phi_1(x, y) = x^2 - xy + y^2$$
$$\Phi_2(x, y) = 3(x + y)^2 - 4(x - y)^2 - 13xy$$
$$\Phi_3(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

1. *Montrer qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\Phi_1 + \alpha\Phi_2 = 0$
2. *Déterminer les signatures des formes* Φ_1, Φ_2 *et* Φ_3.
3. *Les formes* Φ_1, Φ_2 *et* Φ_3 *sont-elles définies positives ?*